

АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Камолов Аброр Икромович
Доцент Джизакского филиала НУУЗ
Назиров Жавохир Шодиер Угли
Магистрант 2-курса ДжГПУ

Аннотация: В работе получена асимптотически неулучшаемая оценка приближения одного класса случайных процессов (сл.пр.) линейными положительными операторами (л.п.о.) в метрике пространства L_p .

Ключевые слова: приближение, модуль непрерывности, линейный положительный оператор, асимптотически правильная константа.

Рассмотрим приближение класса $\overline{C}_\Omega(R^1)$ – всех измеримых, равномерно непрерывных в метрике L_p действительных сл.пр. $\zeta(t)$,

$M|\zeta(t)|^p \leq L < \infty$, $t \in R^1$, $p > 1$, линейным положительным оператором

$$P_n(\zeta; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) dF_t^{(n)}(x) \quad (1)$$

где

$F_t^{(n)}(x) = P\left\{\frac{S_n}{n} < x\right\}$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $\{X_k\}$, $k=1,2,3,\dots$ – последовательность независимых, одинаково распределенных (н.о.р) случайных величин (сл.вел.) такая, что $F_1(x) = P\{X_1 < x\}$, $MX_1 = t$, $M[X_1 - t]^2 = \sigma^2(t)$, $t \in T \subset R^1$.

Очевидно, что $P_n(\zeta; t) \in \overline{C}_\Omega(R^1)$.

Пусть $D \subset T$ – любое компактное множество,

$\omega_\zeta(x) = \max_{|t-s| \leq x} \{M|\zeta(t) - \zeta(s)|^p\}^{\frac{1}{p}}$ – модуль непрерывности сл.пр. $\zeta(t) \in \overline{C}_\Omega(R^1)$.

Из результатов [1], [2] следует, что $\{M|\zeta(t) - P_n(\zeta, t)|^2\}^{\frac{1}{2}} \leq C\omega_\zeta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Естественно, наименьшая (“оптимальная”) постоянная, которую можно поставит вместо C в правой части этого неравенства

$$C_0 = C_0(F_t) = s \cup p_{\substack{\zeta(t) \in \overline{C}_\Omega(R^1) \\ n \in N}} \left\{ \frac{\max_{t \in D} \{M|\zeta(t) - P_n(\zeta, t)|^p\}^{\frac{1}{p}}}{\omega_\zeta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \right\}.$$

Вопрос нахождения точного значения оптимальной (“неулучшаемой”) константы C_0 пока остаётся открытой. Вместо нее вычислим асимптотически правильную константу, т. е. величину

$$C_1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{\xi(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)} \left\{ \frac{\max_{t \in D} \{ M |\xi(t) - P_n(\xi, t)|^p \}^{\frac{1}{p}}}{\omega_\xi(1/\sqrt{n})} \right\} \right]$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$A_1: \max \{ M |X_1 - t|^3 : t \in D \} \leq L < \infty ;$$

$$B_1: \max \{ \sigma^2(t) : t \in D \} = \sigma^2(t_0) = \sigma^2 > 0, \quad t_0 \in D.$$

Теорема 1. Если выполнены условия (A_1) и (B_1), то:

а) для любых $\xi(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$ и $\varepsilon > 0$ существует $n_0(\varepsilon) \in N$ такое, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$ имеет место соотношение:

$$\max_{t \in D} \{ M |\xi(t) - P_n(\xi, t)|^p \}^{\frac{1}{p}} < [\varkappa(\sigma) + \varepsilon] \omega_\xi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (2)$$

б) неравенство (2) неулучшаемо для класса $\overline{C_\Omega}(R^1)$ в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_1(\varepsilon) \in N$ и сл.пр. $\xi_n(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$ такое, что для всех $n > n_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\max_{t \in D} \{ M |\xi_n(t) - P_n(\xi_n, t)|^p \}^{\frac{1}{p}} > [\varkappa(\sigma) - \varepsilon] \omega_{\xi_n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Теорема 1.1.2. Если выполнены условия (A_1) и (B_1), то имеет место соотношение:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{\xi(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)} \left\{ \frac{\max_{t \in D} \{ M |\xi(t) - P_n(\xi, t)|^p \}^{\frac{1}{p}}}{\omega_\xi(1/\sqrt{n})} \right\} \right] = \varkappa(\sigma),$$

где $\varkappa(\sigma) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \{ \Phi[(k+1)/\sigma] - \Phi[k/\sigma] \}$, $\Phi(x)$ -стандартная нормальная функция распределения.

Отметим, что задачи о правильной и асимптотически правильной постоянных в оценках приближения л.п.о. (1) были поставлены академиком Азларовым Т.А. в 1984 году.

Постоянная $\varkappa(\sigma)$ совпадает с асимптотически оптимальной постоянной, найденной другим методом в работе [3] для неслучайных функций.

Список литературы

1. Дрожжина Л.В., О линейной аппроксимации случайных полей. Теория вероятн. и математич. статистика, 1975, вып.13, с. 46-52.
2. Дрожжина Л.В., Совместное приближение случайных процессов и их производных линейными положительными операторами, Доклады АН УССР, А, № 6, с.7-8.
3. Stancu D.D. Approximation of functions by a new class of linear polinomial operators , Revue roum. Math.pures et appl., 1968, 13, 1173-1194.